Traitement du Signal 1

Maxime Ossonce

EFREI/ESIGETEL - L3

Plan du cours

1. Classification des signaux
2. Produit de convolution
3. Fonction d'autocorrélation
4. Représentation fréquentielle

Signal, information

- Une information décrit ce qui mérite d'être transmis, ce qui n'est pas connu.
- Un **signal** est la variation d'une grandeur physique porteuse d'une **information** : courant, tension, pression acoustique...
- Le **traitement du signal** constitue l'ensemble des techniques permettant de décrire, traiter, interpréter un signal dans le but de mettre en forme ou d'extraire une information.

Classes de signaux

Nous distinguerons

- Les signaux continus / les signaux discrets ;
- les signaux déterministes / les signaux aléatoires ;
- les signaux à énergie finie / les signaux à puissance finie.

Le signal $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ est un signal continu déterministe à puissance finie.

Signaux analogiques

Un signal **analogique** (ou à temps continu) est un signal dont l'évolution est décrite selon une variable continue $t \in \mathbb{R}$.

- A chaque temps $t \in \mathbb{R}$ on associe $x(t)$ la valeur du signal ;
- pour les signaux réels on aura $x(t) \in \mathbb{R}$;
- les signaux **complexes** prendront leurs valeurs dans $\mathbb{C}$:
  - considérer un signal à valeurs complexes nous permettra la simplification de l'étude d'un signal à valeurs réelles ;
  - par exemple le signal dit analytique $Ae^{j\omega_0 t}$ de $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$.

Exemple de signaux continus

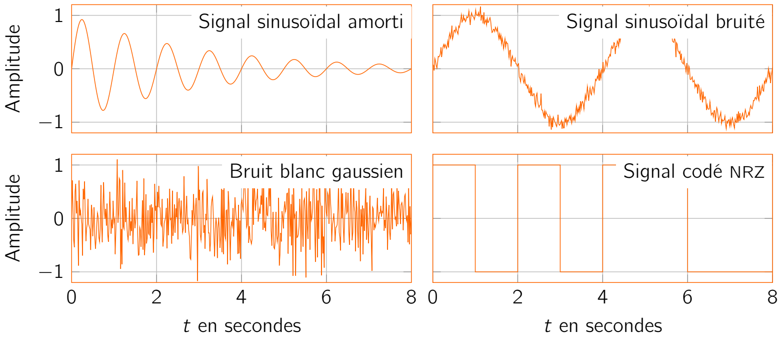


Figure : Sinusoïde amortie, sinusoïde bruitée, bruit blanc gaussien, signal codé NRZ.

Signaux discrets

Un signal discret est un signal dont l'évolution est décrite selon une variable discrète $n \in \mathbb{Z}$.

- Pour chaque instant d'échantillonnage $n \in \mathbb{Z}$ on associe $x(n)$ la valeur du signal ;
- un signal discret est généralement le résultat de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$
- aux instants nT_e.
- $f_e = \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage.
- Les signaux discrets sont traités grâce à des processeurs de traitement de signal (DSP).

Information, évènements et probabilité

L'information apportée par un évènement est liée par nature à son caractère **aléatoire**.

- L'étude d'un signal porteur d'une information nous amène à le considérer dans sa dimension probabilistique ;
- un signal aléatoire (ou processus stochastique) est un signal dont on connait les propriétés statistiques, par exemple l'espérance mathématique, la variance. . .
- Un signal **déterministe** est un signal dont la valeur $x(t)$ est connue pour tout instant t.
- On observera d'un signal aléatoire une (ou des) réalisation(s).

Exemples de signaux aléatoires

- Le bruit est un signal aléatoire ;
- un signal déterministe bruité est donc un signal aléatoire.
- Les échantillons reçus à l'entrée d'un Processeur de traitement du signal (*DSP*) constituent un signal discrets aléatoires.

Signaux bornés

On ne considérera que le signaux bornés parmi lesquels on trouve

- les signaux à **énergie** finie

$$E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

- les signaux à **puissance** finie

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Signaux à support borné

Les signaux à support borné sont à énergie finie.

$$x(t) = 0 \text{ si } t \notin [t_1, t_2].$$

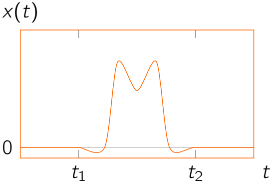


Figure : Signal à support borné

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$$

Somme de signaux

- La puissance de la somme **n'est pas** la somme des puissances ;
- l'énergie de la somme **n'est pas** la somme des énergies.

$$\begin{aligned} |x_1(t) + x_2(t)|^2 &= |x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 + x_1(t) \cdot \overline{x_2(t)} + \overline{x_1(t)} \cdot x_2(t) \\ &\neq |x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 \end{aligned}$$

- Sauf dans le cas de signaux **orthogonaux**

$$\int x_1(t) \cdot \overline{x_2(t)}\, dt = 0,$$

- par exemple : deux signaux sinusoïdaux de fréquences différentes ou déphasés de $\pi/2$.

Moyenne d'un signal

Les signaux à puissance finie oscillent autour d'une valeur **moyenne**.

Valeur moyenne d'un signal à puissance finie

$$\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Signaux périodiques

Les signaux périodiques sont à puissance finie.

- $x(t) = x(t + T_0)$;
- T_0 est la période du signal.
- Si $x_{T_0}(t)$ est le signal $x(t)$ restreint à un support de largeur T_0
- $x(t) = x_{T_0}(t) + x_{T_0}(t - T_0) + x_{T_0}(t - 2T_0) + \cdots + x_{T_0}(t + T_0) + x_{T_0}(t + 2T_0) + \cdots$

Puissance d'un signal périodique

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt$$

- Remarque : une somme de signaux périodiques n'est pas nécessairement un signal périodique (*exercice*).

Signal porte

- Les signaux à support borné ($x(t) = 0$ si $x \notin [t_1, t_2]$) sont à énergie finie.
- $E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$
- Par exemple, la fonction **porte** de largeur T, centrée en 0 :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

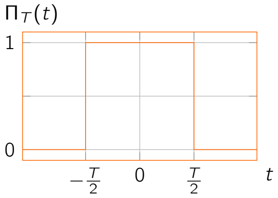


Figure : Signal porte de largeur T, $\Pi_T(t)$

$$E = \int_{\mathbb{R}} |\Pi_T(t)|^2 \, dt = T$$

Exponentielle monolatérale

- L'exponentielle amortie monolatérale est un signal à énergie finie ;
- $\alpha > 0$.

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

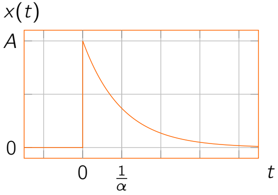


Figure : Exponentielle amortie monolatérale, $x(t) = e^{-\alpha t}$

$$E = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t}\, dt = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Exponentielle bilatérale

- L'exponentielle amortie bilatérale est un signal à énergie finie ;
- $\alpha > 0$.

$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$$

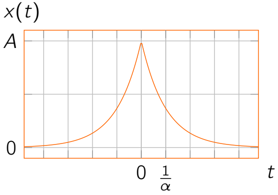


Figure : Exponentielle amortie bilatérale, $x(t) = e^{-\alpha|t|}$

$$E = \int_{\mathbb{R}} A^2 e^{-2\alpha|t|}\, dt = \frac{A^2}{\alpha}$$

Sinus cardinal

- Le **sinus cardinal** est un signal à énergie finie ;

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- continu (au sens mathématique).

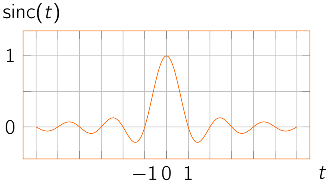


Figure : Sinus cardinal

- $E = 1$
- Calcul dans le domaine fréquentiel (**Parseval**).

Signal constant

- Le signal constant $\forall t \; x(t) = A$ est à puissance finie

$$P = A^2.$$

- Sa moyenne est $\mu = A$

Exponentielle complexe

- L'exponentielle complexe (ou **pulsation**) de fréquence f_0

$$x(t) = Ae^{2j\pi f_0 t + j\phi} \qquad A \in \mathbb{R}$$

- est à valeurs complexes
- est de puissance finie
- $|x(t)|^2 = A^2$
- $P = A^2$.
- $\mu = 0$.
- $\underline{A} = Ae^{j\phi}$ est l'amplitude complexe, $x(t) = \underline{A}e^{2j\pi f_0 t}$.

Signal sinusoïdal

- Un signal sinusoïdal s'écrit sous la forme

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

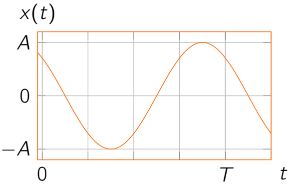


Figure : Signal sinusoïdal

- $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi f_0$

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

$\mu = 0.$

Somme de sinusoïdes

Une somme de sinusoïdes

$$x(t) = \sum_m A_m \cos(2\pi f_m t + \phi_m)$$

est de puisssance non nulle. On considère $f_m \neq 0$ et $f_m \neq f_n$ si $m \neq n$. Alors

$$P = \sum_m \frac{A_m^2}{2}$$

Signal périodique

Un signal **T_0-périodique** ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) peut s'écrire sous la forme d'une **série de Fourier**

Série de Fourier

$$s(t) = A_0 + A_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2\cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \cdots$$
$$+ A_n\cos(n\omega_0 t + \phi_n) + \cdots$$

La puissance du signal périodique est alors

$$P = A_0^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \cdots + \frac{A_n^2}{2} + \cdots$$

Sa moyenne est $\mu = A_0$.

Signal carré

- Le signal carré est un signal T_0-périodique défini sur $[0, T_0[$ par

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T_0/2[\\ 0 & \text{si } t \in [T_0/2, T_0[\end{cases}$$

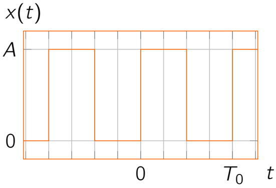


Figure : Signal carré

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A^2\,dt = \frac{A^2}{2}$$

$$\mu = \frac{A}{2}.$$

Signal carré de rapport cyclique r

Le Dirac

- La notion de fonction $t \to x(t)$ ne permet pas de rendre compte de tous les phénomènes physiques.
- Par exemple, l'**impulsion** $\delta(t)$ est telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t) = 0 \qquad\qquad \text{si } t \neq 0$$

- L'impulsion ne peut pas être une *fonction*.
- $\delta(t)$ est appelé impulsion de Dirac.
- La notion de **distribution** introduite par Laurent Schwartz posera le cadre théorique pour cette objet mathématique, la **distribution** de Dirac.

Limite d'une suite de fonctions

- Le Dirac peut être vu comme la limite (pour $\epsilon \to 0$) d'une suite de fonctions porte, de largeur ϵ, d'amplitude ϵ^{-1}.
- On a bien $\int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-1} \Pi_\epsilon(t)\, dt = 1$.

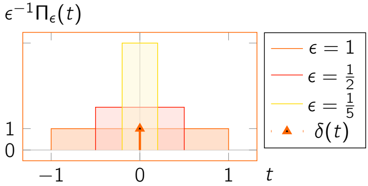


Figure : L'impulsion Dirac est la limite d'une suite de fonctions.

Propriétés du Dirac

- Si on considère une fonction $x(t)$ alors le produit $x(t) \cdot \delta(t)$ est un Dirac d'amplitude $x(0)$

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t).$$

- La **distribution** Dirac permet de *prélever* la valeur d'une fonction au temps $t = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \delta(t)\, dt = x(0).$$

- On peut considérer le Dirac centré en t_0, $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$:

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0).$$

Fonction de Heavyside

- La fonction de Heavyside $u(t)$ est la fonction **échelon** :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

- On a par ailleurs :

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- L'impulsion Dirac est donc la **dérivée** de la fonction de Heavyside.

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Un **SLIT** est un appareil de traitement du signal tel que

- si $y_1(t)$, $y_2(t)$ sont les **réponses** du système à $x_1(t)$, $x_2(t)$, alors
- la réponse à $x_1(t) + \alpha x_2(t)$ est $y_1(t) + \alpha y_2(t)$;
- la réponse à $x(t - t_0)$ est $y(t - t_0)$.

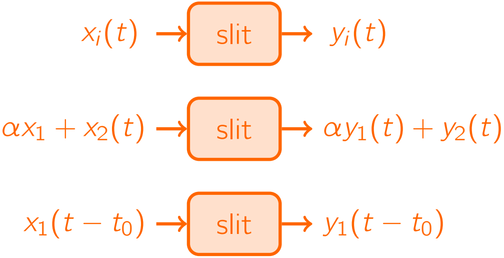


Figure : Représentation schématique des propriétés d'un SLIT

Filtres linéaires

- Les SLIT sont aussi nommés des **filtres linéaires**
- Les filtres linéaires sont tels qu'il existe un fonction $h(t)$, appelée la **réponse impulsionnelle**, telle que
- pour toute entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ est

$$y(t) = x * h(t)$$

- $y(t)$ est le produit de **convolution** de $x(t)$ et $h(t)$.

Convolution

Le produit de convolution $z(t) = x * y\,(t)$

$$z(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

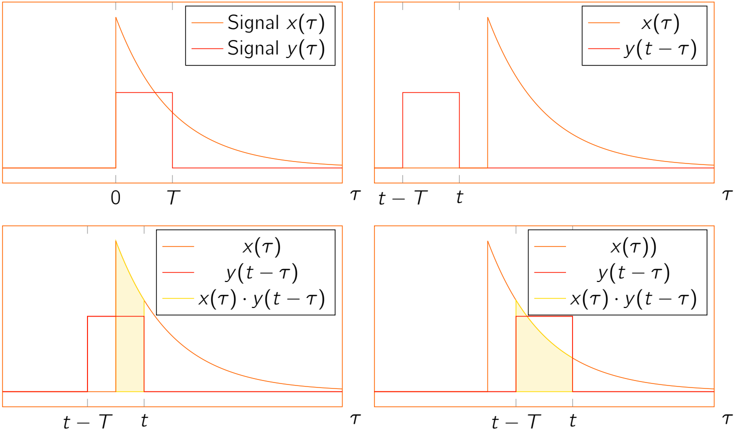
- La convolution est **commutative** $z(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau) \cdot y(\tau)\, d\tau$.
- Par simplification, on notera $z(t) = x(t) * y(t)$.

Propriétés

Le produit de convolution est

- commutatif : $x * y\,(t) = y * x\,(t)$,
- **distributif** par rapport à l'addition : $\alpha \in \mathbb{K}$, $(x_1 + \alpha x_2) * y\,(t) = x_1 * y\,(t) + \alpha x_2 * y\,(t)$,
- **associatif** : $(x * y) * z\,(t) = x * (y * z)\,(t)$.

Interprétation physique



Elément neutre

- L'élément **neutre** du produit de convolution est le **Dirac**
- $x * \delta\,(t) = x(t)$

$$\begin{aligned} x * \delta\,(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)\cdot\delta(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t)\cdot\delta(\tau)\,d\tau \\ &= x(t)\cdot\int_{\mathbb{R}}\delta(\tau)\,d\tau \\ &= x(t) \end{aligned}$$

- Le produit de convolution d'un signal quelconque et du Dirac centré en t_0 est le signal $x(t)$ retardé de t_0

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Signal périodique

- Soient $x(t)$ un signal T_0-périodique et $x_{T_0}(t) = x(t)$ sur un intervalle de largeur T_0 et nul en dehors. On a

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_{T_0}(t) + x_{T_0}(t - T_0) + x_{T_0}(t - 2T_0) + \cdots \\
&\quad + x(t + T_0) + x_{T_0}(t + 2T_0) + \cdots \\
&= x_{T_0} * \delta\,(t) + x_{T_0} * \delta_{T_0}\,(t) + x_{T_0} * \delta_{2T_0}\,(t) + \cdots \\
&\quad + x_{T_0} * \delta_{-T_0}\,(t) + x_{T_0} * \delta_{-2T_0}\,(t) + \cdots \\
&= x_{T_0} * (\delta + \delta_{T_0} + \cdots + \delta_{-T_0} + \cdots)\,(t) \\
&= x_{T_0} * Ш_{T_0}\,(t)
\end{aligned}
$$

- Un signal péridodique s'écrit comme le produit de convolution d'un signal à support borné et un **peigne de Dirac** de cadence T_0, $Ш_{T_0}(t)$.

Peigne de Dirac

Un signal T_0-périodique $x(t)$ peut s'écrire comme le résultat du produit de convolution d'un signal à support borné x_{T_0} et d'un peigne de Dirac $Ш_{T_0}(t)$ de cadence T_0.

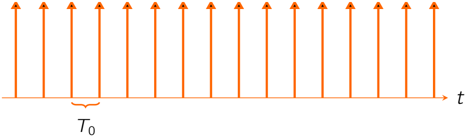


Figure : Peigne de Dirac

Convergence

Le produit de convolution existe quand l'intégrale converge :

$$\int_{\mathbb{R}} x(t-\tau) \cdot y(\tau)\, d\tau < \infty$$

Il existe des conditions **suffisantes** d'existence du produit de convolution :

- Si $x(t)$ et $y(t)$ sont à énergie finie, $x * y\,(t)$ existe et est à énergie finie ;
- si $x(t)$ est à énergie finie et $y(t)$ est à puissance finie, alors $x * y\,(t)$ existe et est à puissance finie ;
- si $x(t)$ et $y(t)$ sont causaux (et *intégrable sur tout segment*) alors $x * y\,(t)$ existe et est causal ;
- si $x(t)$ et $y(t)$ sont à support borné (et *intégrable sur tout segment*), alors $x * y\,(t)$ existe et est à support borné.

Signal porte et signal quelconque

Exercice

Montrer que le $z(t)$, le produit de convolution de

- $x(t)$ un signal quelconque (*intégrable sur tout segment*) et de
- $y(t)$ la fonction porte de largeur T centrée en $T/2$:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vaut

$$z(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau.$$

Convolution de deux signaux porte de même largeur

Exercice

Calculer

$$\Pi_T * \Pi_T(t).$$

Convolution de deux signaux porte de largeurs différentes

Exercice

Calculer

$$\Pi_{T_1} * \Pi_{T_2}(t).$$

Exercice

Montrer que si $x(t)$ et $y(t)$ sont à support temporel fini alors $z(t) = x * y(t)$ l'est aussi.

Signal porte et singal sinusoïdal

On considère le signal $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ (à puissance finie) et le signal porte $\Pi_T(t)$.

Exercice

Calculer

$$z(t) = \Pi_T * x(t).$$

Corrélation

La **corrélation** entre deux signaux permet de mesurer la *ressemblance* entre ces derniers :

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$$

Elle est assimilable à un produit scalaire :

- Maximal quand $x(t) = \alpha y(t)$ (les signaux sont colinéaires) ;
- nul lorsque les signaux sont **orthogonaux**.
- La corrélation entre un signal et lui-même est la norme de ce dernier (puissance ou énergie).

Autocorrélation

L'**autocorrélation** $\gamma_x(\tau)$ d'un signal $x(t)$ est la corrélation entre $x(t)$ et lui-même retardé de τ.

- La *ressemblance* maximale est atteinte pour un retard nul (soit $\tau = 0$).
- Pour des raisons de convergence, il sera appliqué deux définitions selon que le signal étudié est à
  1. énergie finie ;
  2. puissance finie.

Définition

Autocorrélation du signal $x(t)$ à énergie finie

$$x(t) \to \gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \overline{x(t-\tau)}\, dt$$

Si $x(t)$ est à valeurs réelles (*resp.* complexes) alors $\gamma_x(\tau)$ est à valeurs réelles (*resp.* complexes).

Propriétés

- Maximum :

$$\gamma_x(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot \overline{x(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\, dt = E$$

$$|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = E$$

- Symétrie **hermitienne** :

$$\gamma_x(-\tau) = \overline{\gamma_x(\tau)} \Leftrightarrow \begin{cases} |\gamma_x(\tau)| \text{ est pair} \\ \arg\{\gamma_x(\tau)\} \text{ est impair} \end{cases}$$

- Si $x(t)$ est à valeurs réelles alors $\gamma_x(\tau)$ est réél et pair.
- Si $x(t)$ est à support temporel fini, $\gamma_x(\tau)$ l'est aussi.

Définition

Autocorrélation du signal $x(t)$ à puissance finie

$$x(t) \rightarrow \gamma_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \overline{x(t-\tau)}\, dt$$

- Si $x(t)$ est T_0-périodique, $\gamma_x(\tau)$ l'est aussi :

$$\begin{aligned}\gamma_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot \overline{x(t-\tau)}\, dt \\ &= \frac{1}{T_0} \gamma_{x_{T_0}}(\tau) * Ш_{T_0}(\tau)\end{aligned}$$

Propriétés

- Maximum :

$$\gamma_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot\overline{x(t)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = P$$

$$|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = P$$

- Symétrie **hermitienne** :

$$\gamma_x(-\tau) = \overline{\gamma_x(\tau)} \Leftrightarrow \begin{cases} |\gamma_x(\tau)| \text{ est pair} \\ \arg\{\gamma_x(\tau)\} \text{ est impair} \end{cases}$$

- Si $x(t)$ est à valeurs réelles alors $\gamma_x(\tau)$ est réél et pair.

Signal porte

Sinus cardinal

Exponentielle unilatérale

Exponentielle bilatérale

Signal constant

Exponentielle complexe

Signal sinusoïdal

Somme finie de sinusoïdes

Signal carré de rapport cyclique r

Fréquence

Le **spectre** permet de représenter le signal dans une autre base :

- base temporelle $\longrightarrow$ base **fréquentielle**
- $t \in \mathbb{R}$(en secondes) $\longrightarrow f \in \mathbb{R}$(en Hertz).

Transformée de Fourier

- La transformée de **Fourier** permet de calculer le **spectre** du signal étudié.
$$x(t) \in \mathbb{C} \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \in \mathbb{C}$$
- $|X(f)|$ est le spectre d'**amplitude**.
- $\arg\{X(f)\}$ est le spectre de phase.
- En théorie f parcourt $\mathbb{R}$. Les interprétations physiques pourront se contenter des fréquences positives.

Définition

Transformée de Fourier $X(f) = \mathrm{TF}\{x(t)\}$

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft}\, dt$$

- Transformée de Fourier inverse :

$$X(f) \xrightarrow{\mathrm{TF}^{-1}} x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \cdot e^{+2j\pi tf}\, df.$$

- La transformée de Fourier permet de décrire le signal dans le domaine fréquentiel.
- A chaque fréquence f est associée une amplitude $|X(f)|$ et une phase $\arg\{X(f)\}$.

Propriétés

- Linéarité : $\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{\text{TF}} \alpha X(f) + \beta Y(f)$;
- Le retard n'induit pas une modification du spectre d'amplitude :

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot e^{-2j\pi t_0 f}.$$

- Pour $f = 0$, on a $X(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, dt$;
- $x(t) \cdot e^{2j\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$;
  - propriété utile pour la modulation.

Propriétés

- $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$.
- Dérivée : $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TF}} j2\pi f X(f)$;
- dérivée : $\frac{d^n x(t)}{d^n t} \xrightarrow{\text{TF}} (j2\pi f)^n X(f)$;
- $tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{dX(f)}{df}$;
- $t^n x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(f)}{df}$.

Produit de convolution

- La transformée de Fourier du produit de convolution est le produit des transformées de Fourier

$$x * y\,(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot Y(f),$$

- $x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f).$

Signaux réels

- Pour $x(t)$ à valeurs réelles ou complexes, on a

$$\overline{x(t)} \xrightarrow{\text{TF}} \overline{X(-f)}.$$

- Les signaux à valeurs **réelles** sont tels que $\overline{x(t)} = x(t)$
- On observe donc une symétrie hermitienne pour la transformée de Fourier des signaux à valeurs réelles :

$$X(-f) = \overline{X(f)}$$

- $|X(f)|$ est pair ;
- $\arg\{X(f)\}$ est impair.

Densité spectrale d'énergie

La DSE permet de connaitre la répartition en fonction de la fréquence f de l'énergie du signal $x(t)$.

- La DSE s'exprime en $\mathrm{J\,Hz^{-1}}$.
- La DSE de $x(t)$, notée $S_x(f)$, est la transformée de Fourier de l'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ du signal $x(t)$.
- Il s'agit par ailleurs de $|X(f)|^2$.
- L'égalité de **Parseval** indique que

$$E = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, df$$

Calcul de la DSE

$$
\begin{tikzcd}
 & X(f) \arrow[dr, "|\cdot|^2"] & \\
x(t) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"] \arrow[dr] & & S_x(f) = |X(f)|^2 \\
 & \gamma_x(\tau) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Signal porte $x(t) = \Pi_T(t)$

$$X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$
$$|X(f)| = T|\,\mathrm{sinc}(fT)|$$
$$S_x(f) = T^2\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

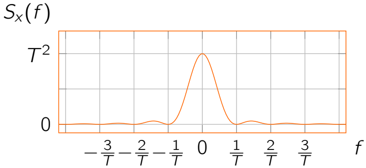


Figure : DSP du signal porte

- L'égalité de Parseval permet de calculer $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2(fT)\,df = \frac{1}{T}$
- La répartition de l'énergie sur la bande $[0\,;\frac{1}{T}]$ est approx. de 90% de l'énergie totale :

$$\frac{\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} S_x(f)\,df}{\int_{\mathbb{R}} S_x(f)\,df} \approx 0.9$$

Sinus cardinal $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$

- On prend $Y(f) = \Pi_\theta(f)$. Que vaut $y(t)$?
- Que vaut $X(f)$?
- Qu'indique la relation de Parseval ?

Exponentielle unilatérale

Exponentielle bilatérale

Impulsion Dirac

On calcule la transformée de Fourier de l'impulsion Dirac

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}\{\delta(t)\} &= \int_{\mathbb{R}} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt \\ &= e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Signal constant

- On ne peut pas calculer directement la transformée de Fourier du signal constant $x(t) = A$, $\int_{\mathbb{R}} Ae^{-j2\pi ft}\,dt$.
- Par dualité des formules de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier **inverse**
- et de la transformée de Fourier du **Dirac**, on en déduit :

Formule de Poisson

$$x(t) = 1 \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f)$$

On en déduira que

$$x(t) = e^{2j\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$

Spectre de raie

Le signal de puissance finie

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2j\pi f_n t}$$

aura pour transformée de Fourier

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - f_n)$$

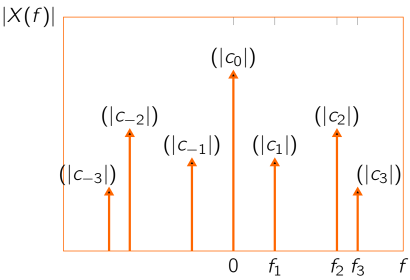


Figure : Spectre d'amplitude d'un signal à puissance finie

- Si le signal est réel, $X(f)$ observe une symétrie hermitienne
- Si le signal est périodique, on aura $f_n = nf_0$.

Peigne de Dirac $x(t) = Ш_T(t)$

La transformée de Fourier du peigne de Dirac de cadence T_0 est un peigne de Dirac de cadence f_0 de poids f_0

Transformée de Fourier du peigne de Dirac

$$Ш_{T_0}(t) \xrightarrow{\text{TF}} f_0 Ш_{f_0}(f)$$

Signaux périodiques

Un signal T_0-périodique $x(t)$ s'écrit comme étant la convolution du signal $x_T(t)$ dont le support est de largeur T_0 et un peigne de Dirac de cadence T_0 :

$$x(t) = x_{T_0} * Ш_{T_0}(t)$$

On aura donc

$$X(f) = f_0 X_{T_0}(f) \cdot Ш_{f_0}(f)$$

On peut aussi écrire

$$X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0 X_{T_0}(n f_0) \cdot \delta(f - n f_0).$$

Soit $X(f) = \sum_n c_n \delta(f - n f_0)$ où c_n sont les coefficients de Fourier du signal $x(t)$.

Densité spectrale de puissance

La DSP permet de connaitre la répartition en fonction de la fréquence f de la puissance du signal $x(t)$.

- La DSP s'exprime en $\mathrm{W\,Hz^{-1}}$.
- La DSP de $x(t)$ est la transformée de Fourier de l'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ du signal $x(t)$.
- Il s'agit par ailleurs de $|X(f)|^2$.

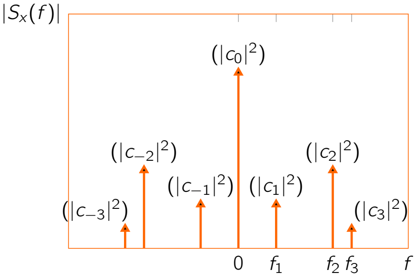


Figure : DSP d'un signal à puissance finie

Calcul de la DSP

$$\begin{tikzcd}
& X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\delta(f-f_n) \arrow[dr, "|\cdot|^2"] & \\
x(t) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"] \arrow[dr] & & S_{xx}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\,\delta(f-f_n) \\
& \gamma_x(\tau) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"'] &
\end{tikzcd}$$

- On aura $P = \sum_n |c_n|^2$.

Exponentielle complexe

Signal sinusoïdal

Signal carré

Signal carré de rapport cyclique r

Signal triangulaire