esigetel efrei / L3 / Théorie du signal 1 / TD

Maxime Ossonce
Laurie Conteville

2015/16

Sujet n° 1

Convolution et autocorrélation

Sommaire

Exercice n° 1 : Autocorrélation d'un signal à énergie finie

1.1) Calculer l'autocorrélation d'une exponentielle amortie ($\alpha > 0$) :

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice n° 2 : Autocorrélation d'un signal périodique

2.1) Rappeler la propriété de l'autocorrélation d'un signal péridodique.

2.2) Calculer $\gamma_x(\tau)$ l'autocorrélation d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi).$$

Exercice n° 3 : Convolution par une impulsion

La convolution est l'opérateur mathématique modélisant le comportement des systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT), autrement dit les filtres linéaires. La convolution de deux signaux $x(t)$ et

$y(t)$ s'écrit

$$z(t) = x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

3.1) Montrer que l'impulsion dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution.

3.2) Montrer que le retard $x(t-t_0)$ peut s'écrire comme une convolution entre le signal $x(t)$ et un dirac centré en t_0.

On considère un signal périodique $x(t)$ ainsi que

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [-T_0/2, T_0/2[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.3) Ecrire $x(t)$ à partir du signal $x_{T_0}(t)$.

3.4) Montrer que $x(t) = x_{T_0} * Ш_{T_0}(t)$.

Exercice n° 4 : Convolution de deux signaux portes

On note Π_T la fonction porte de largeur T

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.1) Calculer $\Pi_T * \Pi_T(t)$.

4.2) Calculer $\Pi_{T_1} * \Pi_{T_2}(t)$ où $T_1 > T_2$.

Exercice n° 5 : Filtre RC

Un filtre passe-bas de premier ordre est de réponse impulsionnelle (causale)

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le réel $\alpha > 0$ est l'inverse de la *constante de temps*. Calculer $y(t) = x * h(t)$ dans les cas suivants :

5.1) L'entrée $x(t)$ est un signal sinusoïdal.

5.2) L'entrée $x(t)$ est un *créneau*

$$x(t) = A\Pi\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sujet n° 2

Transformées de Fourier usuelles

Sommaire

Exercice n° 1 : Signal porte

Etant donné $T > 0$, on considère le signal

$$x(t) = A\Pi_T(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.1) Calculer $X(f)$. Représenter $S_x(f)$ la DSE de $x(t)$.

1.2) Que vaut $\int_{\mathbb{R}} S_x(f)\,df$?

1.3) Calculer $\gamma_x(\tau)$ l'autocorrélation du signal $x(t)$.

Exercice n° 2 : Exponentielle amortie

Soit α un réel strictement positif. On étudie le signal suivant :

$$x(t) = \begin{cases} A\,e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1) Représenter $x(t)$.

2.2) Montrer que $x(t)$ est à énergie finie. Que vaut E ?

2.3) Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$.

2.4) Calculer et représenter la DSE du signal $x(t)$.

Exercice n° 3 : Propriétés de la transformée de Fourier

On montre les propriétés suivantes. Soit $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$.

3.1) Que vaut la transformée de Fourier de $x(t-t_0)$?

3.2) Que vaut la transformée de Fourier de $x(t) \cdot e^{2j\pi f_0 t}$?

3.3) Que vaut la transformée de Fourier de $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$?

3.4) Que vaut la transformée de Fourier de $A\cos(2\pi f_0 t)$?

On considère que le signal $x(t)$ est dérivable.

3.5) Que vaut la transformée de Fourier de $\dot{x}(t)$?

Exercice n° 4 : Transformée de Fourier inverse

Etant donné $F > 0$, on considère le signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est

$$X(f) = \frac{1}{F}\Pi_F(f) = \begin{cases} \frac{1}{F} & \text{si } |f| < \frac{F}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.1) Quelle est l'expression de $x(t)$?

4.2) Que vaut $\int_{\mathbb{R}} x(t)\,dt$?

4.3) Que vaut $S_x(f)$, la DSE de $x(t)$? En déduire E, l'énergie du signal.

4.4) Que vaut $\gamma_x(\tau)$ l'autocorrélation du signal $x(t)$?

Exercice n° 5 : Signal carré

5.1) Calculer la transformée de Fourier d'un signal carré de rapport cyclique r, en se basant sur le résultat de la question **3.4** du sujet 1.

Exercice n° 6 : Signal triangulaire

On distinguera le signal *triangle*,

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A \cdot \left(1 + \frac{2t}{T_0}\right) & \text{si } t \in \left[-\frac{T_0}{2}; 0\right] \\ A \cdot \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right) & \text{si } t \in \left[0; \frac{T_0}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

du signal *triangulaire* : ce dernier est le signal T_0-périodique $x(t)$ tel que

$$x(t) = x_{T_0}(t) \quad \text{si } t \in \left[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}\right].$$

6.1) Représenter les signaux triangulaire $x(t)$ et triangle $x_{T_0}(t)$.

6.2) Calculer la puissance et la valeur moyenne, ou l'énergie, des signaux $x(t)$ et $x_{T_0}(t)$ suivant qu'ils sont à puissance ou à énergie finie.

6.3) Ecrire le signal $x(t)$ comme étant le résultat du produit de convolution de $x_{T_0}(t)$ et d'un signal à préciser.

On note Π_T la fonction porte de largeur T

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.4) Calculer $\Pi_T * \Pi_T(t)$.

6.5) Ecrire $x_{T_0}(t)$ comme étant, à *un facteur scalaire près*, la convolution de deux portes, dont vous préciserez la largeur.

6.6) Ecrire $x(t)$ comme étant la convolution de 3 signaux.

6.7) En déduire l'expression de la transformée de Fourier de $x(t)$.

Sujet n° 3

Echantillonnage

Sommaire

Exercice n° 1 : Echantillonage théorique

Etant donné un signal $x(t)$ et $f_e = \frac{1}{T_e}$, la fréquence d'*échantillonnage*, le signal échantillonné $x_e(t)$ est le signal :

$$x_e(t) = x(t) \cdot Ш_{T_e}(t).$$

1.1) Ecrire $Ш_{T_e}(t)$ sous forme d'une série de Fourier.

1.2) En déduire l'expression de $X_e(f)$ en fonction de $X(f)$.

1.3) Illustrer le phénomène de recouvrement spectral.

1.4) En déduire la condition de possibilité de *reconstruction* de $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ (théorème de Nyquist-Shannon) ?

Exercice n° 2 : Echantillonnage d'un signal audio

La bande utile d'un signal audio est 50 Hz–18 kHz. L'enregistrement en studio induit la production d'un bruit additif se situant dans la bande 100 Hz–40 kHz.

La numérisation du signal et opéré par échantillonnage à la fréquence f_e. La durée du signal est $T = 10\,\mathrm{s}$.

2.1) **a.** Si nous échantillons le signal tel quel, quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale qui respecte le théorème de Nyquist-Shannon ?

b. Dans ce cas combien d'échantillons seront acquis ?

Nous filtrons ce signal afin de supprimer totalement les fréquences qui composent le bruit.

2.2) **a.** Quelle fréquence d'échantillonnage minimale pourrons-nous utiliser afin qu'il n'y ait pas de repliement de spectre ?

b. Dans ce cas combien d'échantillons seront acquis ?

Exercice n° 3 : Signal échantillonné-bloqué

Le signal échantillonné est illustré à la figure 3.1.

On rappelle que pour une fonction $g(t)$ quelconque :

$$g * \delta_{nT_e}(t) = g(t - nT_e).$$

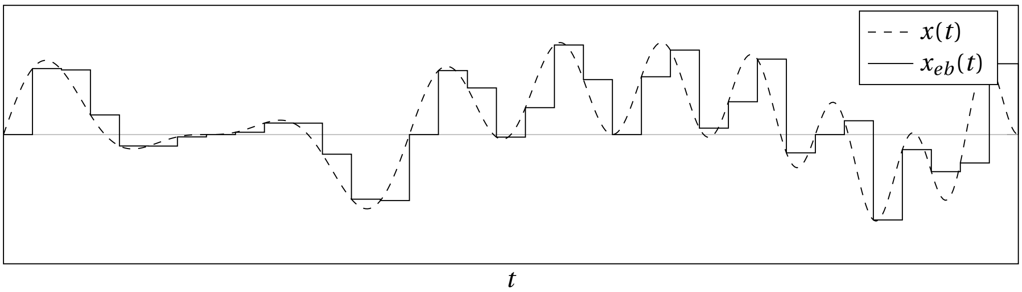

FIGURE 3.1 – Echantillonnage-bloquage d'ordre 0

3.1) Montrer que le signal échantilmlonné-bloqué peut s'écrire sous la forme

$$x_{eb}(t) = x_e * \Pi_{T_e}(t - T_e/2).$$

3.2) Ecrire $X_{eb}(f)$ en fonction de $X_e(f)$. *Illustration.*

3.3) Quelle opération permettra de récupérer $x(t)$ à partir de $x_{eb}(t)$?