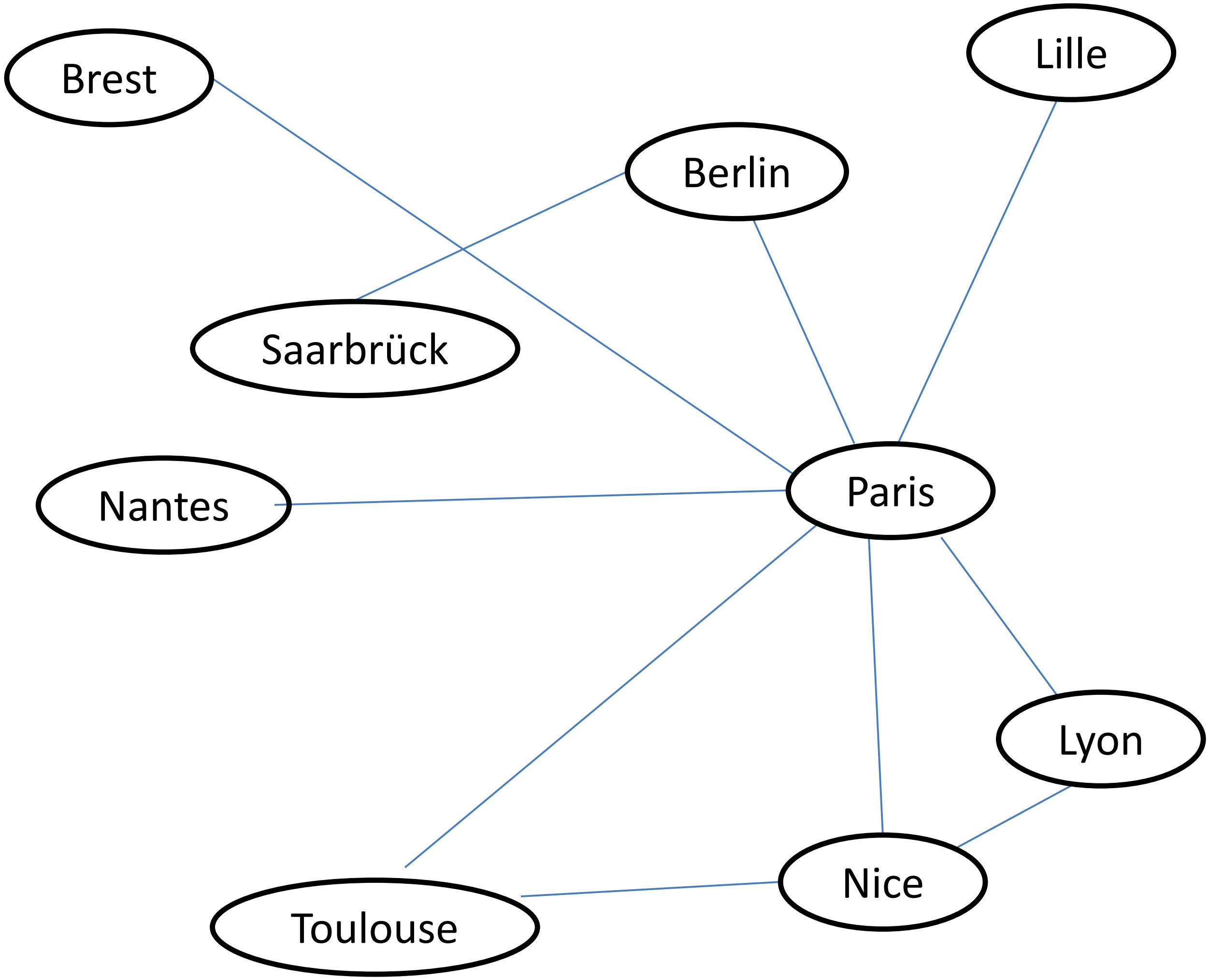
Chapitre 1 : INTRODUCTION
Terminologie et définitions

- Beaucoup de problèmes de la vie courante, tels la gestion de réseaux de communication ou l'ordonnancement de tâches, correspondent à des structures relationnelles que l'on peut modéliser par des graphes.

Graphe: définition

- Un graphe est un ensemble d'objets appelés *sommets* et de *relations binaires* entre ces sommets.
- Plus formellement**,** un **graphe** fini $G = <S, A>$ est défini par
  - l'ensemble fini de sommets $S=\{s_1, s_2, . . . , s_n\}$
  - et par l'ensemble fini $A =\{a_1, a_2, . . . , a_m\}$ de relations binaires entre des sommets: chaque a_i correspond à un couple de sommets.
- On peut considérer des graphes à relations symétriques $((s_i,s_k)=(s_k,s_i))$ (*graphes non orientés*) ou non symétriques (*graphes orientés*).
  Les relations peuvent être dotées d'autres propriétés (par exemple, poids ou longueur). On parle alors d'un **graphe étiqueté**.

Graphe non orienté, exemple : liaisons aériennes



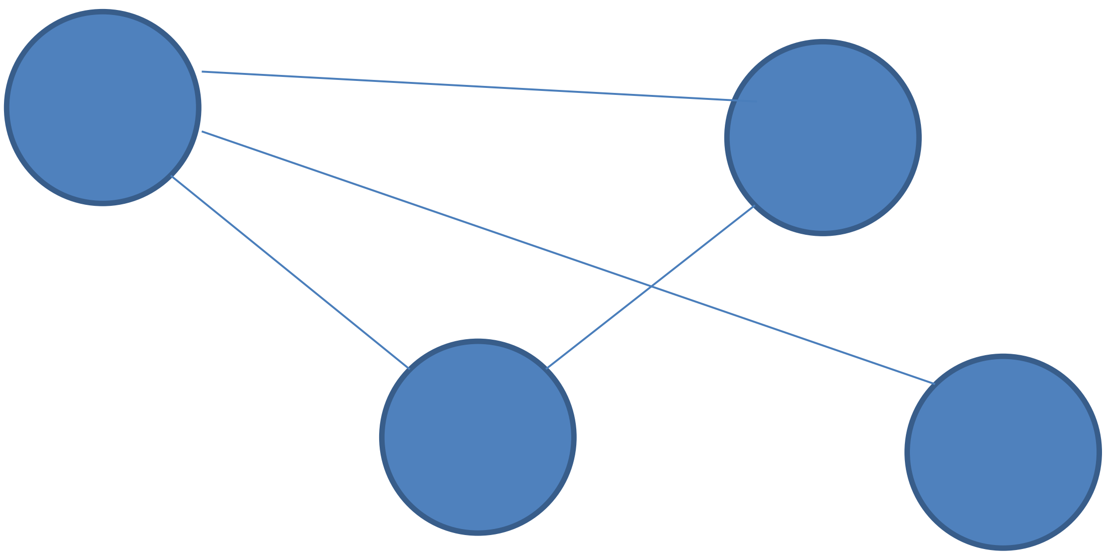
Graphe non-orienté, description

- Dans une carte des liaisons aériennes, les villes sont des sommets du graphe et l'existence d'une liaison aérienne entre deux villes est la relation du graphe.

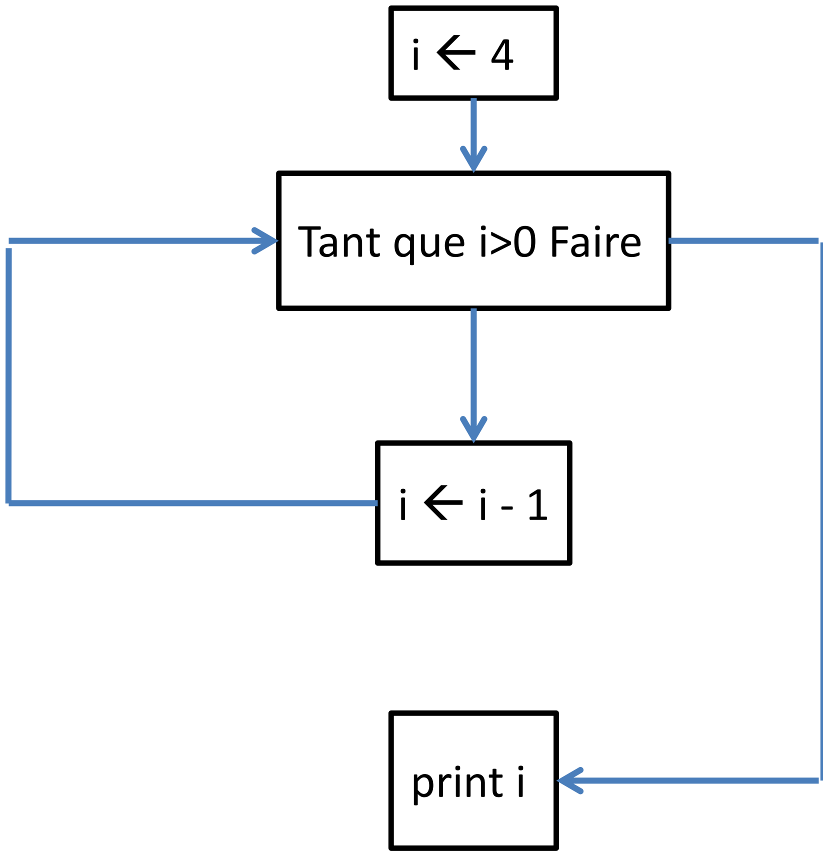
- Dans cet exemple, la relation est ***symétrique*** : on peut supposer que la compagnie aérienne assure des vols aller-retour, donc le couple (Berlin, Paris) est le même que (Paris, Berlin). On dit que ce graphe est ***non-orienté***. Une relation symétrique s'appelle ***arête***: si deux sommets s1 et s2 sont en relation, on dit qu'il existe une arête entre s1 et s2.

Graphe non-orienté, définition

Un ***graphe non-orienté*** G est un couple <S, A>, où S est un ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires de sommets appelées **arêtes**.



Graphe orienté, exemple : Organigramme informatique

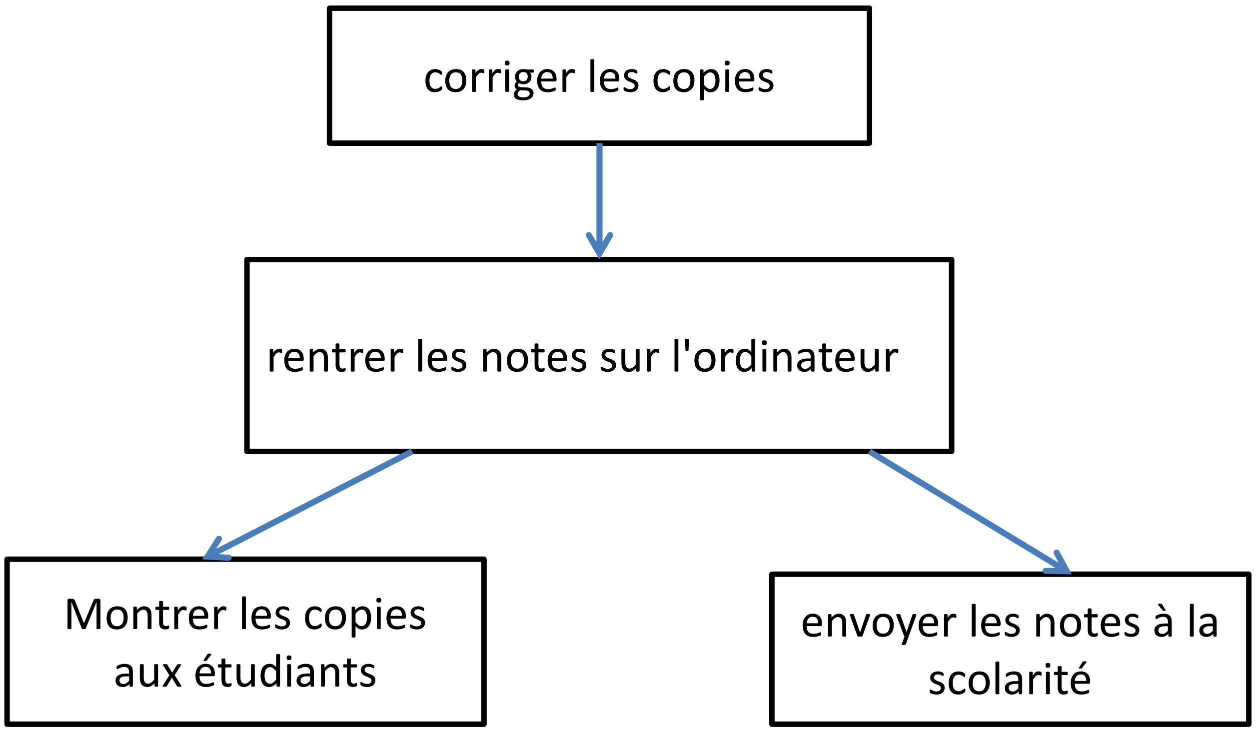


Graphe orienté, un autre exemple : Ordonnancement

Dans une organisation du travail où certaines tâches doivent être exécutées avant d'autres, on peut schématiser l'ordonnancement des tâches par un graphe où les sommets sont les tâches et où il existe un arc entre deux tâches t_i et t_j seulement si t_i doit être terminée juste avant d'exécuter t_j.

Un des traitements intéressants sur un tel graphe est un tri topologique qui consiste à trouver un ordre des tâches tel que toute tâche t_i soit exécutée avant toute tâche t_j s'il existe un arc de t_i à t_j.

Exemple d'ordonnancement: Correction des copies



Graphe orienté, description

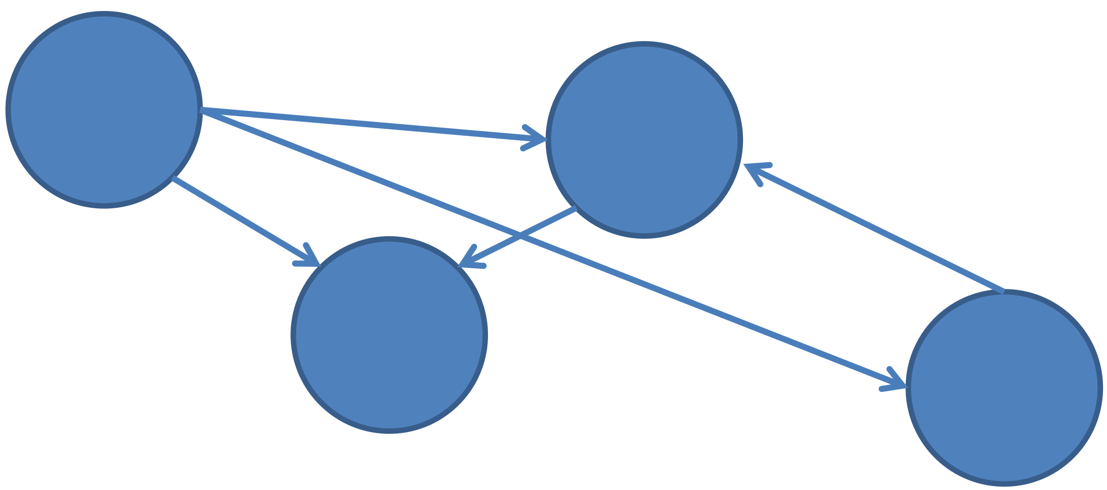
Dans ces deux exemples, la relation n'est pas symétrique.

- Il y a une relation (marquée par une flèche) allant du sommet « Tant que i>0 Faire » au sommet « i ← i – 1 », mais pas dans le sens inverse.
- Il y a une relation allant de « rentrer les notes sur l’ordinateur » vers «envoyer les notes à la scolarité », mais pas dans le sens inverse.

On dit qu’il s’agit d’un graphe ***orienté*,**
et on appelle une telle relation un ***arc***.

Graphe orienté, définition

Un ***graphe orienté*** G est un couple <S, A>, où S est un ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires ***ordonnées*** de sommets appelées **arcs**.



Eléments de terminologie: extrémités, successeurs, prédécesseurs

Dans un graphe orienté :

- On note souvent x→y l'arc (x, y) ;
  x est ***l'extrémité initiale*** de l'arc,
  y est son ***extrémité terminale***.
  On dit que y est un ***successeur*** de x et que x est un ***prédécesseur*** de y.

Dans un graphe non orienté :

- On note souvent x—y l'arête (x, y) ;
  x et y sont les deux ***extrémités*** de l'arête.

Eléments de terminologie: adjacence

- Dans un graphe **non orienté**, deux sommets sont dits adjacents s'il existe une arête les joignant.

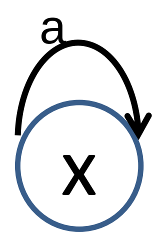
X, Y adjacents

- Dans un graphe **orienté**, le sommet y est dit ***adjacent*** au sommet x s'il existe un arc x→y.

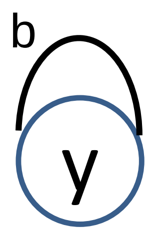
Y adjacent à X mais X n'est pas adjacent à Y

Eléments de terminologie : boucle

- Dans un graphe orienté (*resp. non orienté*), une ***boucle*** est un arc (*resp. arête*) dont les extrémités coïncident.



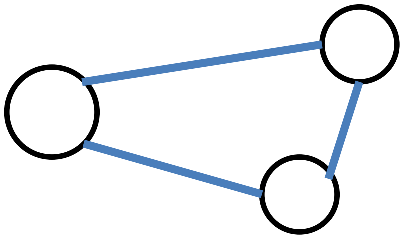
L'arc *a=(x, x)* est une boucle.



L'arête *b=(y, y)* est une boucle

Eléments de terminologie : l'ordre d'un graphe

- On appelle ***l'ordre*** d'un graphe le nombre de ses sommets.



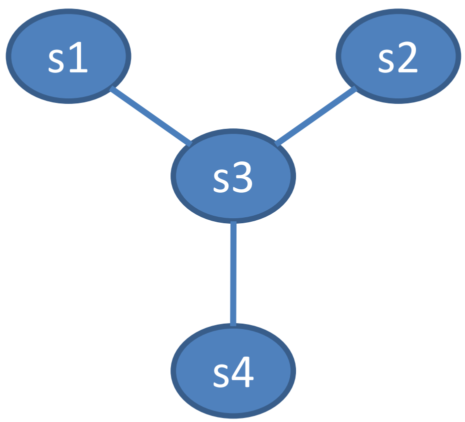
Ceci est un graphe d'ordre 3.

Eléments de terminologie : <u>**sous-graphe**</u> et graphe partiel

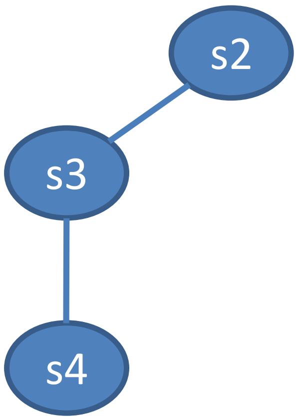
Prenons un graphe, G.

Si l'on en élimine certains sommets et par conséquent tous les arcs (arêtes) qui ne sont plus définis car au moins une de leurs extrémités a disparu, on obtient un **sous-graphe**:

Graphe G:



Sous-graphe engendré par {s2,s3,s4}:

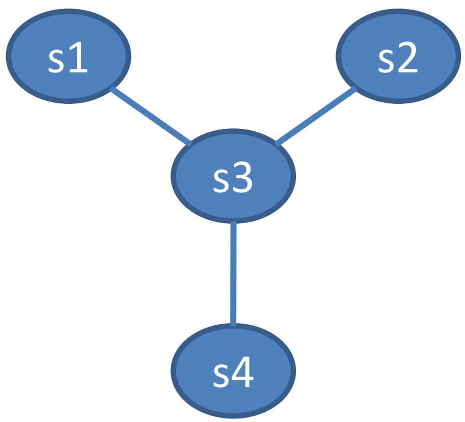


Eléments de terminologie : sous-graphe et **graphe partiel**

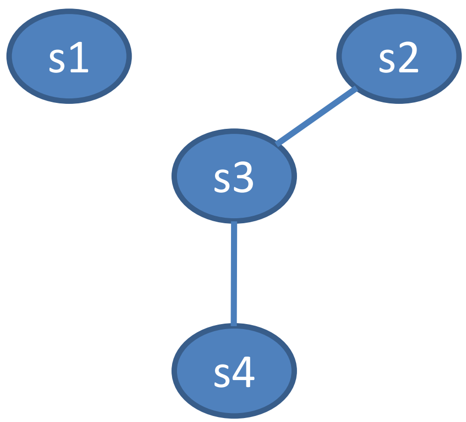
Prenons un graphe, G.

Si l'on en élimine certains arcs (arêtes) sans éliminer les sommets, on obtient un graphe partiel :

Graphe G :



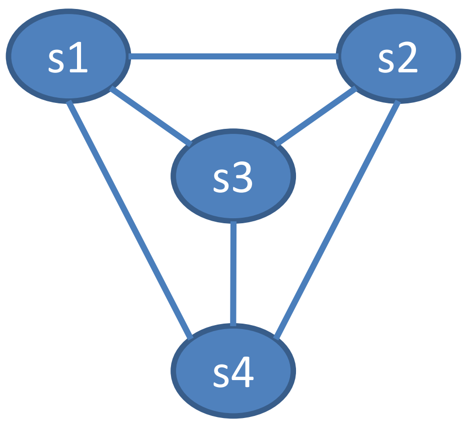
un de ses graphes partiels :

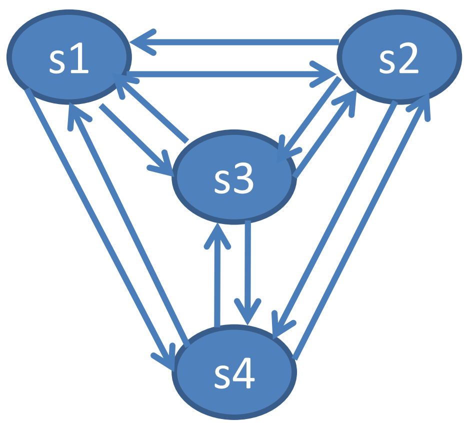


Eléments de terminologie : **graphe complet**

Un graphe orienté (resp. non orienté) est dit ***complet***
si pour tout couple de sommets (x, y),
il existe un arc x→y (resp. une arête x—y).

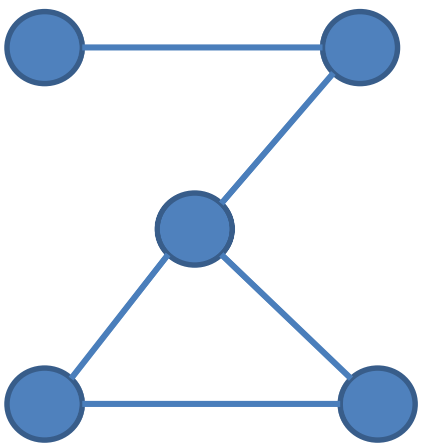
Un graphe ***orienté*** complet est forcément ***symétrique*** (∃ x→y ⇒ ∃ y→x).





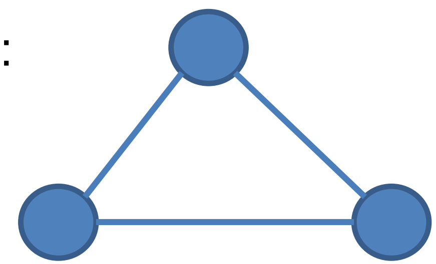
Eléments de terminologie : **clique**

On appelle ***clique*** d'un graphe ***non orienté*** G tout ensemble de ses sommets C tel qu'ils sont deux-à-deux adjacents (reliés par une arête)



Ce graphe possède deux cliques :

Clique 1

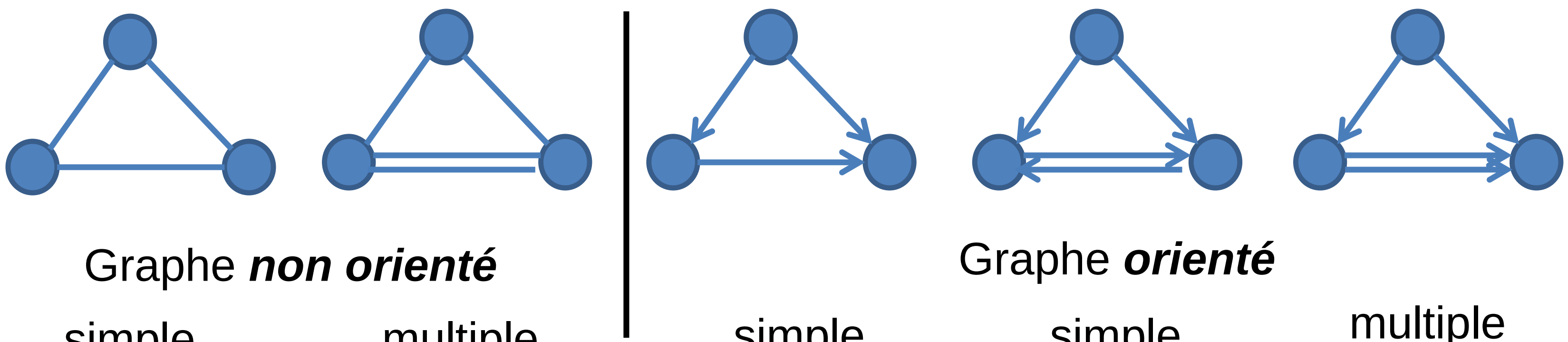


Clique 2

Eléments de terminologie : **graphe simple**

Un graphe ***non orienté*** est dit ***simple*** s'il existe au plus une arête liant deux sommets. Dans le cas contraire le graphe est dit multiple.

Un graphe ***orienté*** est dit ***simple*** s'il existe au plus un arc liant deux sommets ***dans le même sens***. Dans le cas contraire le graphe est dit multiple.



Graphe ***non orienté***

simple multiple

Graphe ***orienté***

simple simple multiple

Définition: Application multivoque

(Pour un graphe orienté)

- L'application ***multivoque***

  $$\Gamma(i)=\{j\in S \mid (i, j) \in A\}$$

  à tout élément $i\in S$ fait correspondre une partie de S : l'ensemble de successeurs de i.

- L'application ***multivoque réciproque***

  $$\Gamma^{-1}(i)=\{j\in S \mid (j, i) \in A\}$$

  à tout élément $i\in S$ fait correspondre une partie de S : l'ensemble de prédécesseurs de i.

Application multivoque, exemple

$\Gamma(s1) = \{s5\}$

$\Gamma(s2) = \{s3, s5\}$

$\Gamma(s3) = \{s4\}$

$\Gamma(s4) = \{s1\}$

$\Gamma(s5) = \varnothing$

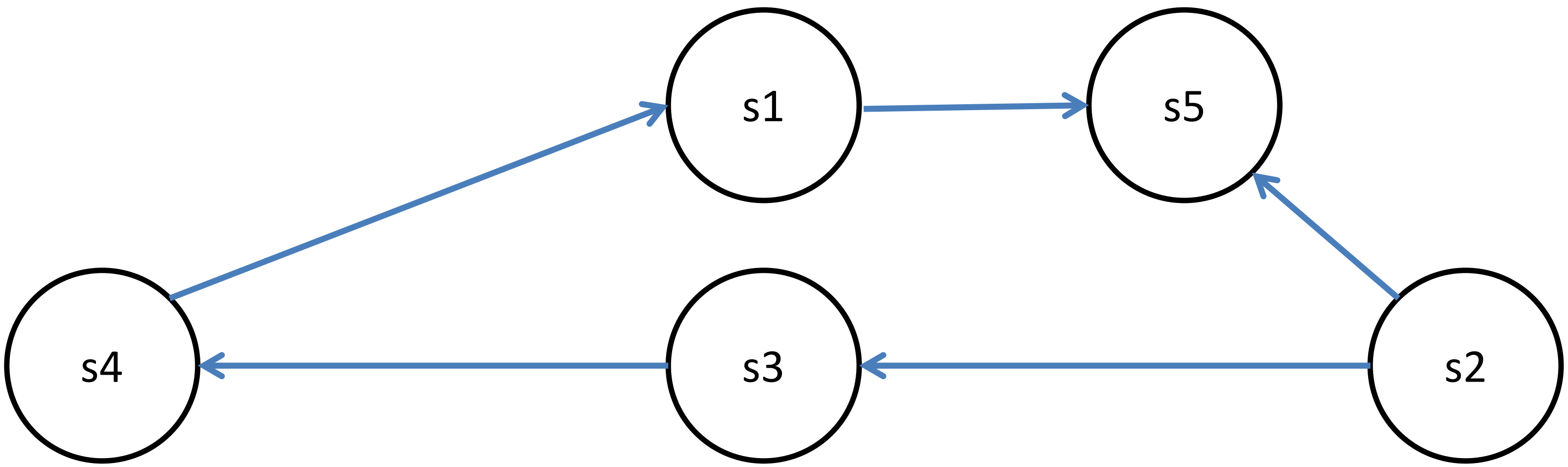
$\Gamma^{-1}(s1) = \{s4\}$

$\Gamma^{-1}(s2) = \varnothing$

$\Gamma^{-1}(s3) = \{s2\}$

$\Gamma^{-1}(s4) = \{s3\}$

$\Gamma^{-1}(s5) = \{s1, s2\}$



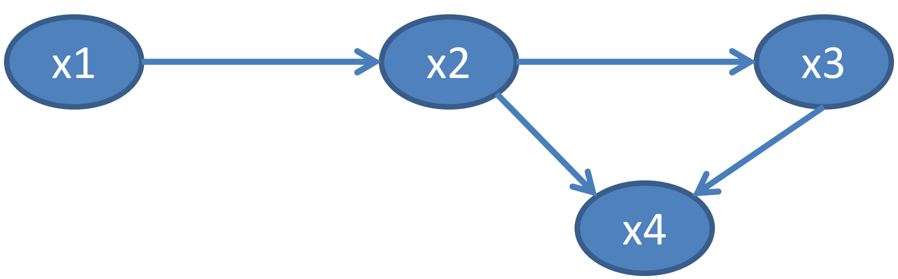
Eléments de terminologie : **chemin et chaîne**

Dans un graphe **orienté** G, on appelle ***chemin de longueur*** ℓ, une suite de (ℓ +1) sommets (s_0, s_1, …, s_ℓ) tels que : pour tout i tel que $0 \leq i \leq \ell -1$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$ est un **arc** de G.

Dans un graphe **non orienté** G, on appelle ***chaîne de longueur*** ℓ, une suite de (ℓ +1) sommets (s_0, s_1, …, s_ℓ) tels que : pour tout i tel que $0 \leq i \leq \ell -1$, $s_i - s_{i+1}$ est un **arête** de G.

- *On dit qu'il y a un chemin de longueur 0 de tout sommet vers lui-même*.

Exemple. Un chemin x1-x3 de longueur 2 : x1x2x3;
deux chemins x1-x4 de longueur 2 et 3: x1x2x4 et x1x2x3x4



Chemin et chaîne (cont.)

Un **chemin** de longueur ℓ (ℓ >0) allant du sommet x vers le sommet y peut aussi être défini de façon récursive :

si ℓ =1, un arc de x vers y

sinon la suite composée d'un arc de x vers un certain sommet z et d'un chemin de z vers y, de longueur ℓ -1.

La définition récursive d'une **chaîne** de longueur ℓ est analogue.

- Un ***circuit*** (resp. un ***cycle***) est un chemin (resp. une chaîne) de longueur non nulle dont les extrémités coïncident.

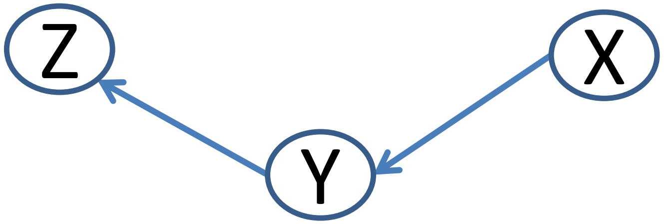
Eléments de terminologie : **graphe transitif**

Le graphe <S,A> est ***transitif*** ssi

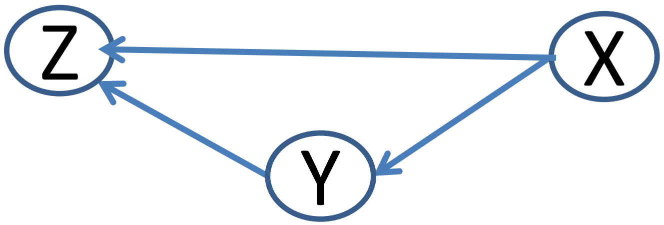
$$\forall i, j, k \in S, \big(((i,j) \in A\big) \& ((j,k) \in A) \Rightarrow \big((i,k) \in A\big)$$

Cela veut dire que s'il y a un ***chemin*** consistant en plusieurs arcs de i à k, il y a aussi un arc i →k.

Ce graphe n'est pas transitif car il existe un chemin X→Y→Z mais il n'y a pas d'arc X→Z :



En ajoutant l'arc qui manque, on obtient un graphe transitif :



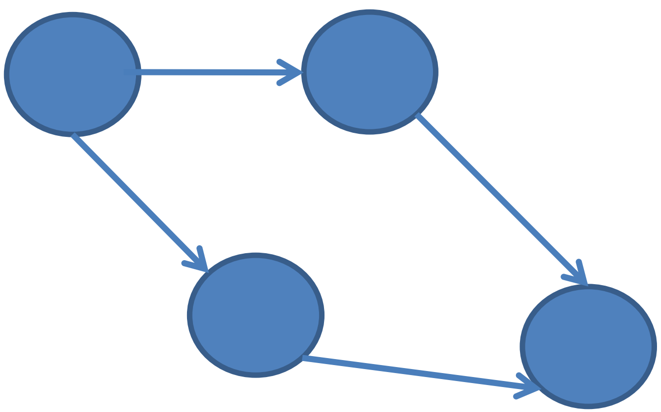
Définition : **fermeture transitive d'un graphe (orienté ou non)**

A tout graphe G=<S, A>, on peut associer de façon ***unique*** un graphe transitif Ĝ = [S, Â], appelé ***fermeture transitive***, où Â est défini par la relation d'appartenance suivante :

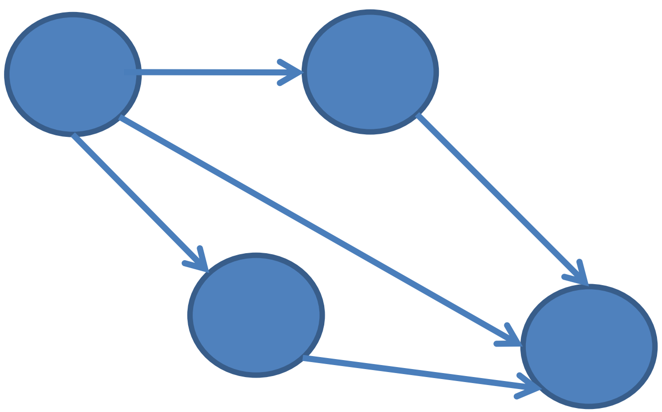
$$(i,j)\in Â \Leftrightarrow \text{il existe dans G un } \textbf{\textit{chemin}} \text{ de i vers j, } i,j\in S.$$

C'est-à-dire que dès qu'il y a un chemin entre deux sommets de G, on y ajoute un arc (arête) entre ses deux sommets (s'il n'y a pas) pout obtenir Ĝ.

Exemple: graphe G



Sa fermeture transitive Ĝ:



Définition : **fermeture transitive d'une application multivoque** **(dans un graphe orienté)**

•On appelle ***fermeture transitive*** de l'application multivoque Γ, l'application $\widetilde{\Gamma}$ telle que :

$$\widetilde{\Gamma}(i)=\Gamma(i)\cup\Gamma^2(i)\cup\ldots\cup\Gamma^{n-1}(i)$$

$\Gamma^k(i)$ représente l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir du sommet i par des chemins ayant exactement k arcs : par exemple,

$$\Gamma^2(i) = \Gamma(\Gamma(i)),\ \Gamma^3(i) = \Gamma(\Gamma(\Gamma(i))),\ \ldots$$

•Tout chemin élémentaire (c.à.d. ne passant pas plus d'une fois par le même sommet) a **au plus n - 1 arcs**, donc
$\widetilde{\Gamma}(i)$ = {tous les sommets qu'on peut atteindre à partir de i}:
c'est l'ensemble des descendants de i.

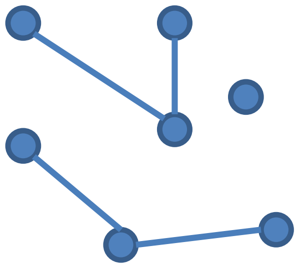
•On définit de la même façon une fermeture transitive de l'application multivoque inverse $\Gamma^{-1}(i)$: $\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)= \Gamma^{-1}(i)\cup(\Gamma^{-1})^2(i)\cup\ldots\cup(\Gamma^{-1})^{n-1}(i)$

•$\widetilde{\Gamma}^{-1}(i)$ est l'ensemble des ancêtres de i.

Connexité

Un graphe non orienté est dit connexe si pour toute paire de sommets distincts (S_i, S_j), il existe une chaîne reliant S_i et S_j.

Un sous-graphe connexe maximal (non strictement contenu dans un autre sous-graphe connexe) d'un graphe non orienté quelconque est une **composante connexe** de ce graphe.



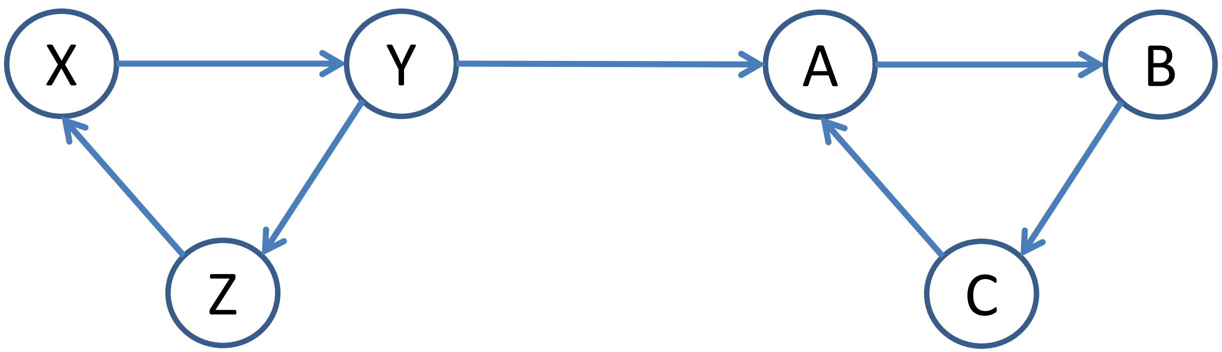
Un graphe non connexe, avec trois composantes connexes

Connexité (cont.)

Un graphe orienté est dit fortément connexe si pour toute paire ordonnée de sommets distincts (S_i, S_j), il existe un chemin de S_i vers S_j
(*et donc de S_j vers S_i, en considérant la paire* (S_j, S_i)).

Un sous-graphe ***fortement connexe*** maximal, c.a.d. non strictement contenu dans un autre sous-graphe fortement connexe, est une ***composante fortement connexe*** d'un graphe orienté **.**

G

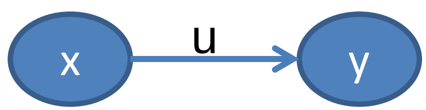


Le graphe G contient 2 composantes fortement connexes : XYZ et ABC

Eléments de terminologie: demi-degrés, degrés

Dans un graphe orienté, si un sommet x est l'extrémité initiale d'un arc u=x→y, on dit que l'arc u est ***incident*** à x ***vers l'extérieur***.

Ce même arc u est ***incident*** à y vers ***l'intérieur***.



Le nombre d'arcs ayant leur extrémité initiale en x se note $d°^{+}(x)$

et s'appelle le ***demi-degré extérieur*** de x.

Le nombre d'arcs ayant leur extrémité finale en x se note $d°^{-}(x)$

et s'appelle le ***demi-degré intérieur*** de x.

Graphe orienté uniquement

Le nombre d'arcs (ou d'arêtes) ayant leur extrémité en x se note $d°(x)$

et s'appelle le ***degré*** de x.

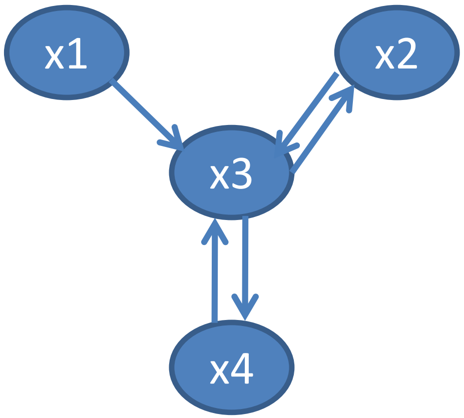
Dans le cas d'un graphe orienté, on a : $d°(x) = d°^{+}(x) + d°^{-}(x)$.

Graphe orienté ou non orienté

Exemple: demi-degrés, degrés

Dans cet exemple, le calcul des degrés du sommet x3 donne :

$d°^{+}(x3)=2$; $d°^{-}(x3)=3$; $d°(x3)=5$.



Degrés : quelques propriétés

Propriété 1 :

Pour un graphe non orienté simple d'ordre *n*, le degré d'un sommet est un entier compris entre 0 et *n* – 1 (le nombre d'autres sommets). Un sommet de degré 0 est dit ***isolé*** : il n'est relié à aucun autre sommet.

Propriété 2 :

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à 2 fois son nombre d'arêtes ou arcs.

Explication :

Une arête ou un arc ***e=(x,y)*** *du graphe est compté(e) exactement 2 fois dans la somme des degrés : une fois dans* ***d(x)*** *et une fois dans* ***d(y)***

Propriété 3 :

Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.

Challenge :

Prouvez-le !

Matrices associées à un graphe

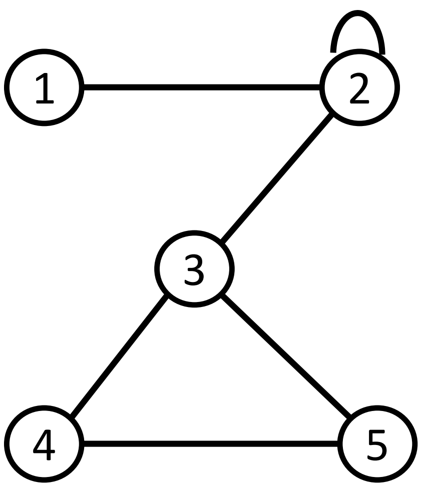
Matrice d'adjacence
(incidence sommets-sommets)

Graphe non orienté :

Pour un graphe non orienté **G** d'ordre ***n*** aux sommets $S_1, S_2, ..., S_n$, sa matrice d'adjacence est une matrice carrée **M** dont l'élément $\mathbf{a_{i,j}}$ est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets S_i et S_j.

*Donc pour **un graphe simple**, la matrice M est **booléenne**.*

La matrice **M** est symétrique ($a_{i,j} = a_{j,i}$) et ses éléments diagonaux sont 0 s'il n'y a pas de boucle, et 1 pour tout sommet ayant une boucle.



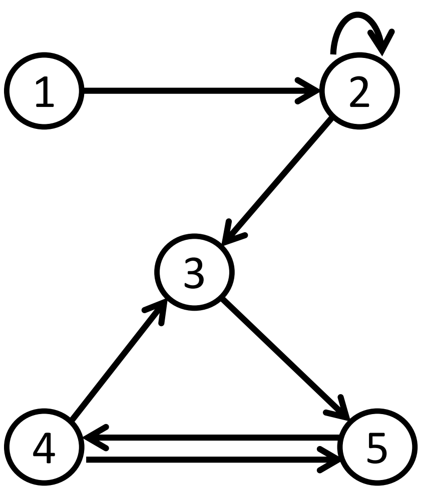
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Matrice d'adjacence

Graphe orienté :

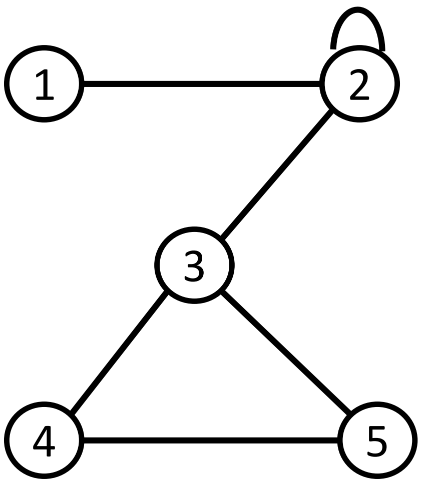
La seule différence avec le cas d'un graphe non orienté, c'est que la matrice d'adjacence **M** n'est pas, en général, symétrique, car l'existence d'un arc (i,j) n'implique pas l'existence de l'arc (j,i).

Pour un graphe orienté **simple**, la matrice **M** est toujours **booléenne**.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0

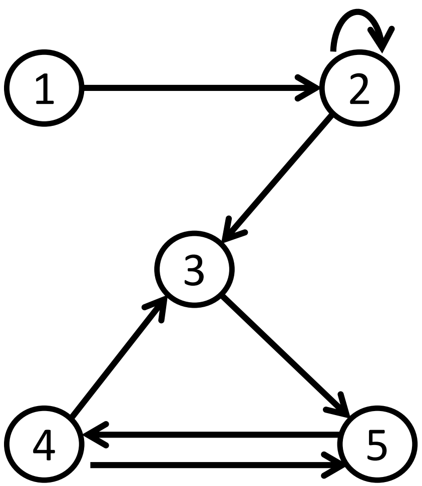
Matrice d'adjacence et degrés
(graphe non orienté)



	1	2	3	4	5	d(i)
1	0	1	0	0	0	1
2	1	1	1	0	0	4
3	0	1	0	1	1	3
4	0	0	1	0	1	2
5	0	0	1	1	0	2
d(i)	1	4	3	2	2	

On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence. Pour un graphe non orienté ne comportant pas de boucle (**M** n'a pas d'éléments diagonaux), il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondante au sommet.
Au cas de boucle, l'élément diagonal correspondant doit être multiplié par 2.

Matrice d'adjacence, demi-degrés et degrés (graphe orienté)



	1	2	3	4	5	$d^{\circ +}(x)$
1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	2
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1	2
5	0	0	0	1	0	1
$d^{\circ -}(x)$	0	2	2	1	2	

Pour un graphe orienté, on peut retrouver les demi-degrés d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence. Il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne correspondant à un sommet pour obtenir le demi-degré extérieur $d^{\circ +}(x)$, et sur la colonne pour obtenir le demi-degré intérieur $d^{\circ -}(x)$. La somme des deux donnera le degré $d^{\circ}(x)$.

Matrice d'incidence (sommets-arcs ou sommets-arêtes)

La matrice d'incidence est une matrice *n* x *p*, où *n* est le nombre de sommets du graphe et *p* est le nombre de liens (arêtes ou arcs).
Cette matrice est définie de deux façons différentes selon que le graphe est orienté ou non orienté.
Si le graphe est orienté, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne *i* et en colonne *j* vaut :

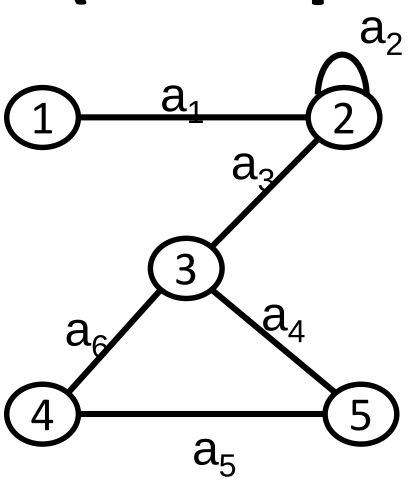
- **+1** si l'arc a_j sort du sommet s_i
- **-1** si l'arc a_j entre dans le sommet s_i
- **0** sinon

Si le graphe est non orienté, le coefficient de la matrice d'incidence en ligne *i* et en colonne *j* vaut :

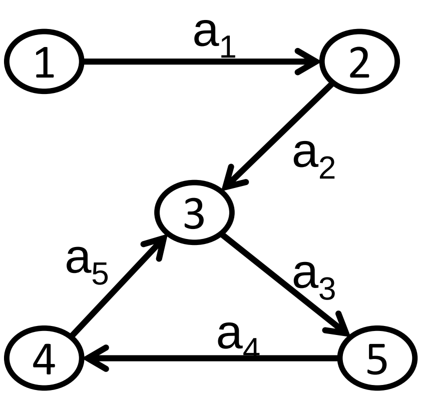
- **1** si le sommet s_i est une extrémité de l'arête a_j
- **2** si l'arête a_j est une boucle sur s_i
- **0** sinon

Pour distinguer les deux définitions, on parle de **matrice d'incidence orientée** et de **matrice d'incidence non orientée**.

Matrice d'incidence
(exemples: graphe non orienté et orienté)



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	0



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0
3	0	-1	1	0	-1
4	0	0	0	-1	1
5	0	0	-1	1	0

Matrice d’incidence (utilité)

Représenter un graphe par une matrice d’incidence est une façon très lourde car la matrice est très creuse.

- En effet sur une même colonne seuls deux éléments ne sont pas nuls : ceux qui correspondent au sommet origine (1) et au sommet destination (-1) de l'arc.

Sur une même ligne, le nombre d'éléments égaux à 1 nous donne le demi degré extérieur alors que le nombre d'éléments égaux à -1 nous indique le demi degré intérieur du sommet.

Dans le cas non orienté, on ne place que des 1 (2 pour une boucle) et la somme d'une ligne indique le degré du sommet.

Cette matrice est inexploitable du point de vue algorithmique mais elle est extrêmement importante du point de vue théorique car elle permet de faire le lien, par exemple, entre la théorie des flots et la programmation linéaire.

Notons que cette matrice **s'adapte assez mal** au cas des **graphes orientés contenant des boucles.**

Listes d'adjacence

Une autre représentation classique des graphes consiste à représenter l'ensemble des sommets par une tableau à 1 dimension et à associer, pour un graphe orienté, à chaque sommet la liste de ses successeurs (ou, plus rarement, de ses prédécesseurs) rangés dans un ordre arbitraire.

Pour un graphe non orienté, la liste consiste des voisins du sommet.

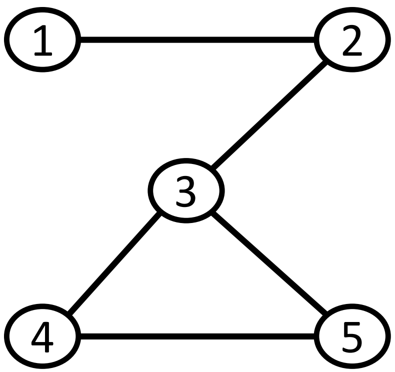
Ces listes sont appelées listes d'adjacence.

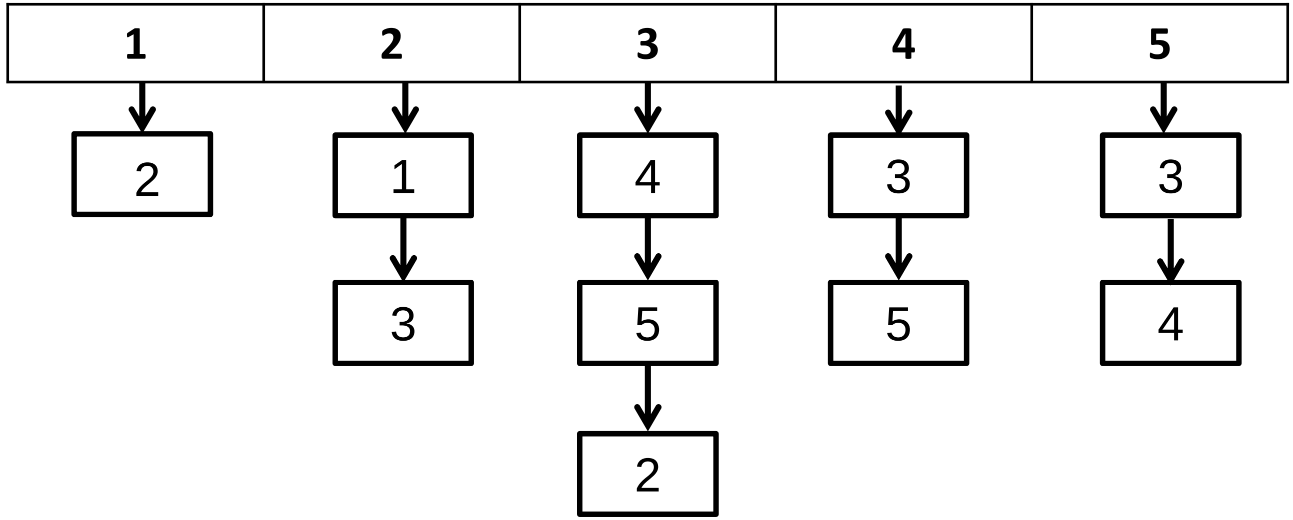
Informatiquement, on construit une matrice à 1 dimension dont les cases représentent des sommets, et chaque case contient un pointeur vers le début de sa liste d'adjacence.

*Cette représentation est particulièrement adaptée aux graphes **creux** (c'est-à-dire contenant peu d'arêtes (d'arcs)), contrairement à la matrice d'adjacence adaptée au graphes **denses** (contenant beaucoup d'arêtes ou d'arcs).*

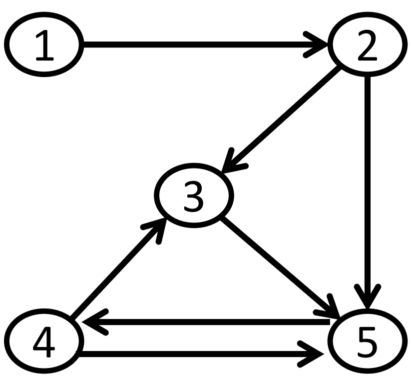
Listes d’adjacence, exemple

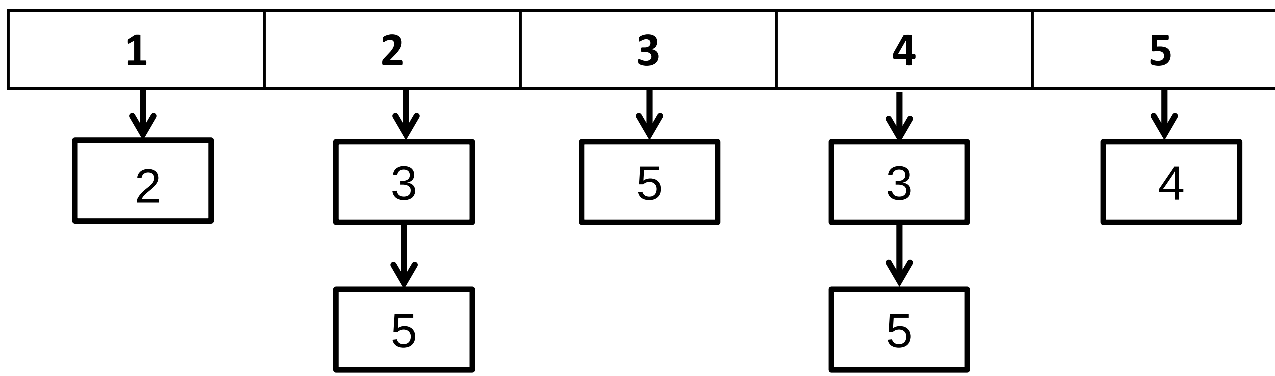
Graphe non orienté :





Graphe orienté :





Détection de circuits, méthodes

Il est souvent intéressant de déterminer si un graphe orienté contient un circuit.

Méthode 1

Un graphe est sans circuit si la matrice d'adjacence M associée à sa fermeture transitive ne possède aucun 1 sur la diagonale.

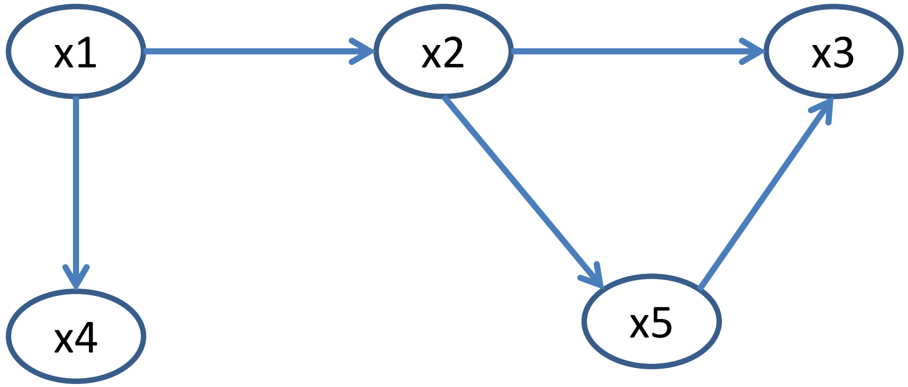
Méthode 2

L'algorithme : Tant que c'est possible, supprimer du graphe un sommet sans prédécesseur. Si on réussit à supprimer tous les sommets, le graphe est sans circuit.

Méthode 2 de détection d'un circuit, exemple

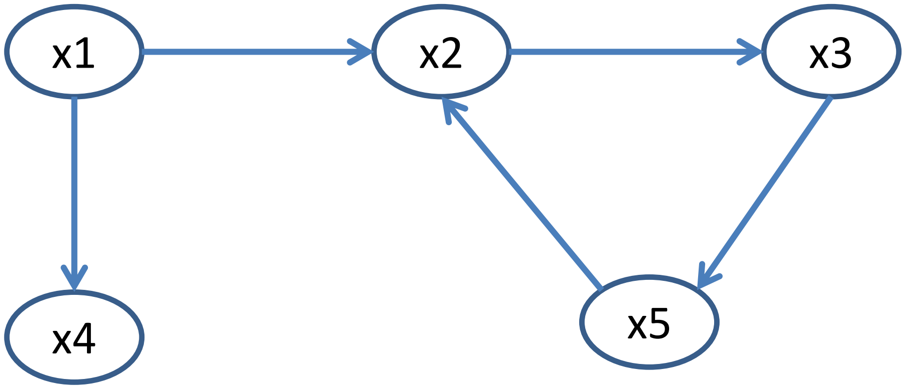
Un graphe sans circuit

On supprime : 1, 4, 2, 5, 3



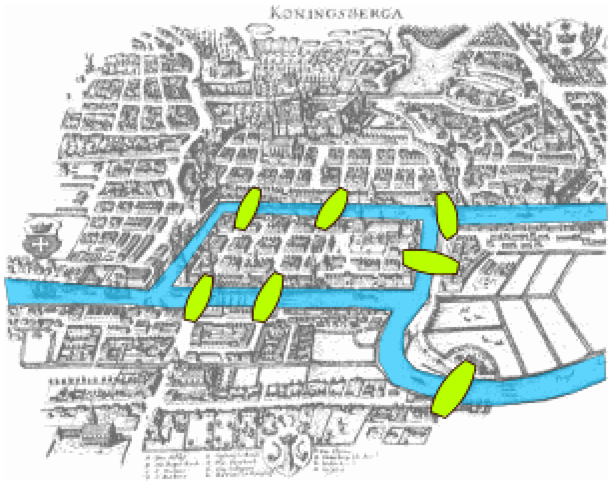
Un graphe avec circuit

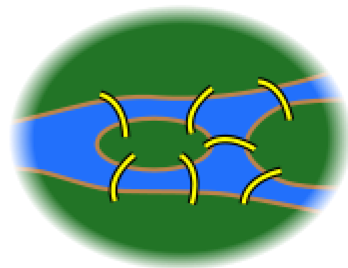
On supprime 1 puis 4, et on ne peut plus rien supprimer

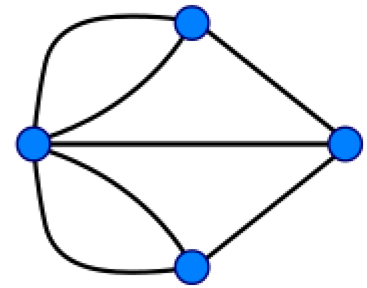


Modélisation
en utilisant les graphes

Les sept ponts de Königsberg

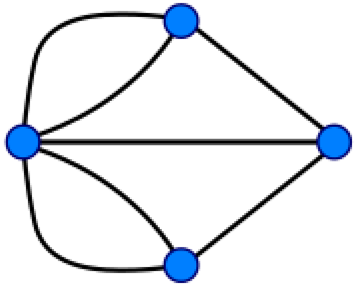






La ville de Königsberg est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont et revenir au point de départ.

Problème résolu par **Leonhard Euler**.

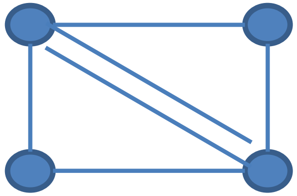


Les sept ponts de Königsberg : solution. Graphe eulérien.

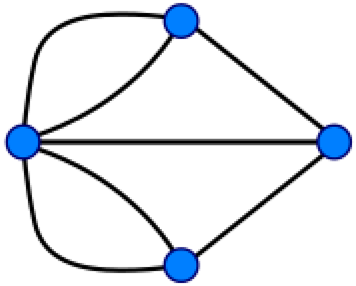
Si la promenade existe, on ordonne les arêtes de façon à ce que deux arêtes consécutives par rapport à notre ordre soient adjacentes dans le graphe (en considérant que la dernière et la première arête sont consécutives, puisqu'il y a retour au point de départ).

Donc tout sommet du graphe est incident à un nombre pair d'arêtes (puisque s'il est incident à une arête il est aussi incident à l'arête précédente ou qui lui succède dans l'ordre). Mais ce graphe-ci a des sommets qui sont incidents à trois arêtes, d'où **l'impossibilité**.

Les graphes tels qu'on peut parcourir le graphe en partant d'un sommet quelconque et en empruntant exactement une fois chaque arête pour revenir au sommet de départ, s'appellent **graphes eulériens**. Ils admettent donc un **cycle eulérien**. Un tel graphe correspond à un dessin qu'on peut tracer sans lever le crayon.



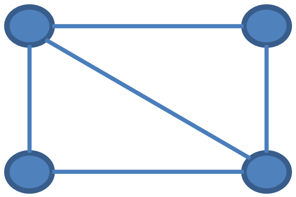
Un graphe eulérien



Graphes semi-eulériens

Même si on renonce à exiger le retour au point de départ, une promenade traversant une et une seule fois chaque pont de Kônigsberg n'existe pas. Elle existerait si au plus deux sommets du graphe, correspondant aux points à choisir respectivement comme **départ** et **arrivée**, étaient incidents à un nombre impair d'arêtes, or les sommets du graphe des ponts de Königsberg sont tous les quatre dans ce cas ; **la promenade est donc impossible**.

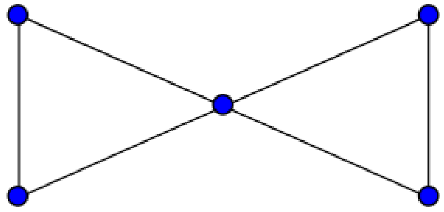
Les graphes tels qu'on peut parcourir le graphe en empruntant exactement une fois chaque arête mais sans nécessairement revenir au sommet de départ, s'appellent **graphes semi-eulériens**. Ils admettent donc une **chaîne eulérienne**. Un tel graphe correspond lui aussi à un dessin qu'on peut tracer sans lever le crayon.



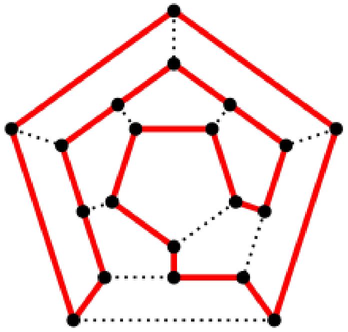
Un graphe semi-eulérien: deux sommets de degré 3

Graphes hamiltoniens

un **graphe hamiltonien** est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une fois et une seule. Un tel cycle élémentaire est alors appelé **cycle hamiltonien.**
Un graphe peut être eulérien, hamiltonien, les deux à la fois, ou aucun des deux.



graphe papillon est un exemple de graphe eulérien mais pas hamiltonien.



Un graphe hamiltonien (graphe des arêtes du dodécaèdre) avec un cycle hamiltonien (en rouge). Ce graphe n'est pas eulérien.

Il n'est pas facile en général de prouver qu'un graphe est hamiltonien ou qu'il ne l'est pas.